18/4/19

Γενικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων και των συμπαγών μετρικών χώρων

**Πρόταση** [SQS]: Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και $K$ ένα συμπαγές υποσύνολο του $X$. Τότε το $K$ είναι κλειστό και φραγμένο.

**Απόδειξη**: Δείχνουμε πρώτα ότι το $K$ είναι φραγμένο. Επιλέγουμε $x \in K$ τυχαίο, τότε: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\rho(x, n)$

Άρα αφού $K \subseteq X$ έχουμε $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\rho(x, n)$

Εφόσον το $K$ είναι συμπαγές $\exists d \in \mathbb{N}$ $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$

ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} B_\rho(x, n_i)$

Θέτουμε $m = \max\{n_1, \dots, n_d\}$ και έχουμε:
$K \subseteq B_\rho(x, m)$. Άρα $\operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(B_\rho(x,m)) \leq \underset{+\infty}{2m \wedge}$

άρα το <u>Κ είναι φραγμένο</u>

Δείχνουμε τώρα ότι το Κ είναι κλειστό

Αρκεί να δείξαμε ότι το συμπλήρωμα του Κ δηλ. το $X \setminus K$ είναι ανοικτό σύνολο.
Έστω $x \in X \setminus K$ (και αναζητούμε $\varepsilon > 0$ ώστε: $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus K$)

Για κάθε $y \in K$ έχουμε $x \neq y$ άρα $\rho(x,y) > 0$ και
Θέτοντας $\varepsilon_y = \frac{1}{2}\rho(x,y)$ έχουμε:

$B_\rho(x, \varepsilon_y) \cap B_\rho(y, \varepsilon_y) = \emptyset$

Η οικογένεια συνόλων $(B_\rho(y, \varepsilon_y))_{y \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του Κ δηλ. $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B_\rho(y, \varepsilon_y)$

Εφόσον το Κ είναι συμπαγές $\exists n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in K$
ώστε $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_1}, \dots, \varepsilon_{y_n}\} > 0$

$B_\rho(x, \varepsilon) \cap K \subseteq B_\rho(x, \varepsilon) \cap \left( \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k}) \right) =$

$= \bigcup_{k=1}^{n} \left( B_\rho(x, \varepsilon) \cap B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k}) \right) \underset{\substack{\varepsilon \leq \varepsilon_{y_k} \\ k=1,\dots,n}}{\subseteq} \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(x, \varepsilon_{y_k}) \cap B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k}) =$

$= \bigcup_{k=1}^{n} \emptyset = \emptyset$ Επομένως $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus K$, άρα το $X \setminus K$ είναι ανοικτό συνεπώς το $K$ είναι κλειστό

<u>Πρόταση:</u> Έστω $(X,\rho)$ συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του $X$ είναι συμπαγές

<u>Απόδ.</u> Έστω $F$ κλειστό υποσύνολο του $X$. Έστω $(G_i)_{i\in J}$ μια οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του $X$ ώστε $F \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$. Εφόσον το $X \setminus F$ είναι ανοικτό επιλέγουμε $i_0 \notin I$ και θέτουμε $G_{i_0} = X \setminus F$ έχουμε

$$X = F \cup (X \setminus F) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup G_{i_0} = \bigcup_{i\in I\cup\{i_0\}} G_i$$

όπου $(G_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων. Εφόσον ο $X$ είναι συμπαγής $\exists\, n\in\mathbb{N}$ $i_1,\dots,i_n \in I$

$X \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} G_{i_k}$ (δηλ. προσθέσαμε το $G_{i_0}$ αν αυτό δεν περιέχεται) δηλ. $X \subseteq (X\setminus F) \cup \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$

άρα: $F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$ Επομένως το $F$ είναι συμπαγές

<u>Πρόταση:</u> Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές

<u>Απόδ.</u> Έστω $F \subseteq \mathbb{R}$, $F$: κλειστό και φραγμένο τότε $F \subseteq [a,b]$ όπου $a = \min F$ και $b = \max F$. Εφόσον το $[a,b]$ είναι συμπαγές και το $F$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ άρα κλειστό στο $[a,b]$ επομένως από την προηγούμενη πρόταση το $F$ είναι συμπαγές.

**Πρόταση** Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

**Απόδειξη** Έστω $(X,\rho)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\left(B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\right)_{x\in X}$

είναι ανοικτό κάλυμμα του $X$ και εφόσον ο $X$ είναι συμπαγής υπάρχει $D_n \subseteq X$,
$D_n$ πεπερασμένο ώστε $X = \bigcup_{x\in D_n} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$

Θέτουμε $D = \bigcup_{n=1} D_n$. Το $D$ είναι αριθμήσιμο (ως αριθμήσιμη ένωση ~~υποσυνόλων~~ πεπερασμένων) οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το $D$ είναι πυκνό.
Έστω $y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ και αφού $X = \bigcup_{x\in D_n} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει $x \in D_n$ ώστε: $y \in B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$ έτσι $\rho(y,x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ και $x \in D$

Άρα το $D$ είναι πυκνό, επομένως ο $X$ είναι διαχωρίσιμος

**Ορισμός** Αν $(F_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων λέμε ότι η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $i_1,\dots,i_n \in I$ ισχύει $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \emptyset$ (με άλλα λόγια: για $J \subseteq I$ με $J$ πεπερασμένο $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$)

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τη συμπάγεια ενός μετρικού χώρου με χρήση κλειστών συνόλων.

Πρόταση: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος. Ο $X$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του $X$ με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $X$ είναι συμπαγής και $(F_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $X$ με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Τότε $\bigcup_{i\in I}(X\setminus F_i) = X\setminus\bigcap_{i\in I} F_i = X\setminus\emptyset = X$

και εφόσον $X\setminus F_i$ είναι ανοικτό για κάθε $i\in I$ λόγω του γεγονότος ότι $X$: συμπαγής υπάρχει $J\subseteq I$ με $J$ πεπερασμένο ώστε $X = \bigcup_{i\in J}(X\setminus F_i)$

Άρα $X = \bigcup_{i\in J}(X\setminus F_i) = X\setminus\bigcap_{i\in J} F_i$ συνεπώς $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$ άτοπο

(διότι υποθέσαμε ότι η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής) Επομένως $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων $(F_i)_{i\in I}$ του $X$ με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

Δείχνουμε ότι ο $(X,\rho)$ είναι συμπαγής
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο $(X,\rho)$ δεν είναι συμπαγής

Τότε υπάρχει μια οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του $X$ με $X=\bigcup_{i\in I} G_i$ ώστε για κάθε $J\subseteq I$ και $J$ πεπερασμένο να ισχύει $X\neq\bigcup_{i\in J} G_i$

Τότε η οικογένεια $(X\setminus G_i)_{i\in I}$ αποτελείται από κλειστά υποσύνολα του $X$ για κάθε $J\subseteq I$ με $J$ πεπερασμένο $\bigcap_{i\in J}(X\setminus G_i) = X\setminus\bigcup_{i\in J} G_i \neq\emptyset$ και $\bigcap_{i\in J}(X\setminus G_i)=X\setminus\bigcup_{i\in I} G_i =$

$= X\setminus X=\emptyset$

άτοπο με την υπόθεση μας. Επομένως ο $(X,\rho)$ είναι συμπαγής.

Πρόταση: κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Απόδειξη: Προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση και τον Χαρακτηρισμό του Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους.

Πράγματι, αν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα οικογένεια μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $X$ με $diam(F_n)\to 0$ η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής

Άρα από την προηγούμενη πρόταση $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\emptyset$

Άρα (από το χαρακτηρισμό του Cantor ο $(X,\rho)$ είναι πλήρης.

Ορισμός: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος. Ο $(X,\rho)$ λέγεται ακολουθιακά συμπαγής για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X$ υπάρχει ακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in X$ ώστε $x_{k_n}\xrightarrow{\rho} x$

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος $(X,\rho)$ λέγεται ολικά φραγμένος αν για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists\, m\in\mathbb{N}$ $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε $X=\bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(x_k,\varepsilon)$. (Γενικότερα, ένα $A\subseteq X$ λέγεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists\, m\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(x_k,\varepsilon)$)

[Μπορούμε αν θέλουμε να επιλέξουμε τα $x_1,\dots,x_n$ να ανήκουν στο $A$]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

α) Αν ένας μ.χ είναι ολικά φραγμένος τότε είναι φραγμένος

β) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι ολικά φραγμένος

γ) Αν $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ το $(a,b)$ είναι ολικά φραγμένο

δ) Ο διακριτός μ.χ $(X,\rho)$ είναι ολικά φραγμένος αν και μόνο αν το $X$ είναι πεπερασμένο

[Πράγματι αν $X$ άπειρο σύνολο και $0<\varepsilon<1$ τότε εφόσον $B_\rho(x,\varepsilon)=\{x\}$ ο $X$ δεν είναι ολικά φραγμένος].

Σημείωση: Αυτός ο $(X,\rho)$ είναι παράδειγμα μ.χ που είναι φραγμένος αλλά όχι ολικά φραγμένος.

Θεώρημα: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος. Τ.Α.Ε.Ι

1) Ο $(X,\rho)$ είναι συμπαγής

2) Για κάθε άπειρο υποσύνολο $A$ του $X$ ισχύει $A'\neq\emptyset$.

3) Ο $(X,\rho)$ είναι ακολουθιακά συμπαγής

4) ο $(X,\rho)$ είναι πλήρης και ολικά φραγμένος

Απόδειξη

((2)→ Αν $A \subseteq X$ με $A' \neq \emptyset$ τότε $A$ πεπερασμένο)

(1)=>(2) Υποθέτουμε ότι ο $(X,\rho)$ είναι συμπαγής. Έστω $A \subseteq X$ με $A' = \emptyset$ (και θα δείξουμε ότι το $A$ είναι πεπερασμένο). Για κάθε $x \in X$ έχουμε $x \notin A'$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ δηλ. $B_\rho(x,\varepsilon_x) \cap A \subseteq \{x\}$. Το $(B_\rho(x,\varepsilon_x))_{x \in X}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $X$ συνεπώς (εφόσον ο $(X,\rho)$ είναι συμπαγής) υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ $x_1, \dots, x_n \in X$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{n} (B(x_k, \varepsilon_{x_k}))$. Τότε $A = A \cap X = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_\rho(x_k, \varepsilon_{x_k})) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\} = \{x_1, \dots, x_n\}$, άρα $A$ πεπερασμένο.

(2)=>(3) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία στο $X$. Θέτουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

α) Αν το $A$ είναι πεπερασμένο τότε υπάρχει $x \in X$ και φυσικοί $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ ώστε $x_{k_n} = x$ $\forall n$. Άρα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (που είναι η σταθερή ακολουθία με όρους $x$) στο $X$, $x_{k_n} \to x$ συγκλίνει

β) Αν το $A$ είναι άπειρο τότε από υπόθεση $A' \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $x \in A'$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ φυσικούς με $x_{k_n} \neq x$ και $\rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$

1ο επαγωγικό: Εφόσον $x \in A' \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}$ με $x_{k_1} \in B_\rho(x,1) \setminus \{x\}$ άρα $x_{k_1} \neq x$ και $\rho(x_{k_1}, x) < 1$

Γενικό επαγωγικό βήμα: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ ώστε $x_{k_i} \neq x$, $\rho(x_{k_i}, x) < \frac{1}{i}$ $i = 1, \dots, n$

Θέτουμε $M = \{m \in \mathbb{N} : m > k_n, \rho(x_m, x) < \frac{1}{n+1}\}$. Τότε $M \neq \emptyset$ τότε

$B_\rho(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}$ άτοπο διότι $x \in A'$. Θέτοντας

$k_{n+1} = \min M$ έχουμε $k_{n+1} > k_n$ και $\rho(x_{k_{n+1}}, x) < \frac{1}{n+1}$. Τότε $\rho(x_{k_n}, x) \to$

άρα $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$